Suites

1. Calculer des termes d'une suite

Instruction : faire les exercices 1 et 2 avec le professeur, faire les exercices 7 et 8 seul.

EXERCICES À FAIRE AVEC LE PROFESSEUR

Exercice 1 (à faire avec le professeur)

(u_n) est la suite définie par $u_n = 3n + 4$ pour tout naturel n.
Calculez les termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4.

Exercice 2

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1 + u_n^2$ pour tout naturel n. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 3

(u_n) est la suite définie par $u_n = sin\frac{n\pi}{2}$ pour tout naturel n.
Calculez les termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4.

Exercice 4

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = (u_n)^2 + \frac{1}{u_n}$ pour tout naturel n. Calculez u_1, u_2, u_3.

Exercice 5

(u_n) est la suite définie par $u_n = \frac{n^2+1}{2n}$ pour tout naturel $n \geq 1$.
Calculez les termes u_1, u_2, u_3, u_4.

Exercice 6

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ pour tout naturel n. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.

EXERCICES POUR PRÉPARER L'INTERROGATION

Exercice 7

(u_n) est la suite définie par $u_n = \frac{2n^2+3}{n+1}$ pour tout naturel n.
Calculez les termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4.

Exercice 8

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 + 2u_n + 1 \end{cases}$ pour tout naturel n. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.

Solution des exercices 1 à 8

1) $u_0 = 4, u_1 = 7, u_2 = 10, u_3 = 13, u_4 = 16$.
2) $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 5, u_4 = 26$.
3) $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = -1, u_4 = 0$.
4) $u_1 = 2, u_2 = \frac{9}{2}, u_3 = \frac{737}{36}$.
5) $u_1 = 1, u_2 = \frac{5}{4}, u_3 = \frac{5}{3}, u_4 = \frac{17}{8}$.
6) $u_1 = 2, u_2 = -1, u_3 = -4, u_4 = -7$.
7) $u_0 = 3, u_1 = \frac{5}{2}, u_2 = \frac{11}{3}, u_3 = \frac{21}{4}, u_4 = 7$.
8) $u_1 = 4, u_2 = 25, u_3 = 676, u_4 = 458329$.

2. Construire graphiquement des termes d'une suite

Instruction : faire les exercices 9 et 10 avec le professeur, faire les exercices11 et 12 seul.

EXERCICES À FAIRE AVEC LE PROFESSEUR

Exercice 9

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3 - \frac{2}{3}u_n \ , \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Sans calcul, dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, représenter les termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur l'axe des abscisses. Unité graphique: 2 cm.

Exercice 10

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \ , \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Sans calcul, dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, représenter les termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur l'axe des abscisses. Unité graphique: 1 cm.

EXERCICES POUR PRÉPARER L'INTERROGATION

Exercice 11

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n \ , \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Sans calcul, dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, représenter les termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur l'axe des abscisses. Unité graphique: 2 cm.

Exercice 12

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \ , \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Sans calcul, dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, représenter les termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur l'axe des abscisses. Unité graphique: 3 cm.

3. Étudier la monotonie d'une suite

Introduction

Exemple : La suite $2, 2, 5, 5, 8, 8, 11, 11,$ ... est croissante.
Exemple : La suite $2, 5, 8, 11,$ ... est strictement croissante. (Elle est aussi croissante).
Exemple : La suite $100, 100, 95, 95, 90, 90,$ ... est décroissante.
Exemple : La suite $100, 95, 90,$ ... est strictement décroissante. (Elle est aussi décroissante).
Exemple : La suite $3, 3, 3, 3,$ ... est constante. . (Elle est aussi croissante et décroissante).
Exemple : La suite $2, -4, 8, -16, 32, -64$ ... n'est ni croissante, ni décroissante, ni constante.

Théorie

Soit $(u_n)_{n\geq p}$ une suite, alors :

- $(u_n)_{n\geq p}$ est **croissante** ssi $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \geq p$,
- $(u_n)_{n\geq p}$ est **strictement croissante** ssi $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \geq p$,
- $(u_n)_{n\geq p}$ est **décroissante** ssi $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout $n \geq p$,
- $(u_n)_{n\geq p}$ est **strictement décroissante** ssi $u_n > u_{n+1}$ pour tout $n \geq p$,
- $(u_n)_{n\geq p}$ est **constante** ssi $u_n = u_{n+1}$ pour tout $n \geq p$.

Remaques :

- (u_n) est strictement croissante $\Rightarrow$ (u_n) est croissante
  car $u_n < u_{n+1} \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$;
- (u_n) n'est pas croissante $\Rightarrow$ (u_n) n'est pas strictement croissante
  par contraposition ;
- (u_n) est constante $\Rightarrow$ (u_n) est croissante
  car $u_n = u_{n+1} \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$;
- (u_n) n'est pas croissante $\Rightarrow$ (u_n) n'est pas constante
  par contraposition.

Instruction : faire les exercices 13 à 16 avec le professeur, faire les exercices 23 à 25 seul.

EXERCICES À FAIRE AVEC LE PROFESSEUR

Exercice 13

La suite (u_n) est définie par $u_n = \frac{2n+5}{n+1}$ pour tout naturel n. Étudier la monotonie de cette suite.

Exercice 14

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} \end{cases}$ pour tout naturel n. Démontrer que cette suite est croissante.

Exercice 15

La suite (u_n) est définie par $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ pour tout naturel $n \geq 1$. Démontrer que cette suite n'est ni croissante ni décroissante.

Exercice 16

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$ pour tout naturel n. Démontrer que cette suite est constante.

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 17

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ pour tout naturel n. Démontrer que cette suite est décroissante.

Exercice 18

La suite (u_n) est définie par $u_n = \frac{3n-1}{n}$ pour tout naturel $n \geq 1$. Démontrer que cette suite est strictement croissante.

Exercice 19

La suite (u_n) est définie par $u_n = sin\frac{n\pi}{2}$ pour tout naturel n. Démontrer que cette suite n'est ni croissante ni décroissante.

Exercice 10

La suite (u_n) est définie par $u_n = \sqrt{n}$ pour tout naturel n. Étudier la monotonie de cette suite.

Exercice 21

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - n^3 - 1 \end{cases}$ pour tout naturel n. Étudier la monotonie de cette suite.

Exercice 22

La suite (u_n) est définie par $u_n = (-1)^n 2^{n+1}$ pour tout naturel n. Étudier la monotonie de cette suite.

EXERCICES POUR PRÉPARER L'INTERROGATION

Exercice 23

La suite (u_n) est définie par $u_n = \frac{n+3}{n+1}$ pour tout naturel n. Démontrer que cette suite est décroissante.

Exercice 24

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1+n}{3+n} \end{cases}$ pour tout naturel n. Étudier la monotonie de cette suite.

Exercice 25

La suite (u_n) est définie par $u_n = \cos\frac{2n\pi}{3}$ pour tout naturel n. Démontrer que cette suite n'est ni croissante ni décroissante.

Solutions des exercices 13 à 25

13) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$. Pour tout $\neq -1, f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2}$, donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. Donc, (u_n) est strictement décroissante.
14) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$; (u_n) est croissante.
15) $u_1 = -1, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{-1}{3}$; (u_n) n'est pas décroissante car $u_1 < u_2$; (u_n) n'est pas croissante car $u_2 > u_3$.
16) Notons P_n la propriété $u_n = 1$.
Initialisation : $u_0 = 1$; P_0 est vraie.
Hérédité : Supposons que P_n est vraie ; $u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2(1) - 1 = 1$; P_{n+1} est vraie.
Conclusion : P_n est vraie pour tout n.
D'où (u_n) est constante.
17) $u_{n+1} - u_n = -3 \leq 0$; (u_n) est décroissante.
18) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{2x-1}{x}$. Pour tout $\neq 0, f'(x) = \frac{1}{x^2}$, donc f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Donc, (u_n) est strictement croissante.
19) $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 0$; (u_n) n'est pas décroissante car $u_0 < u_1$; (u_n) n'est pas croissante car $u_1 > u_2$.
20) La suite (u_n) est strictement croissante car la fonction racine carrée l'est sur $[0; +\infty[$.
21) $u_{n+1} - u_n = -n^3 - 1 < 0$; (u_n) est strictement décroissante.
22) $u_0 = 2, u_1 = -4, u_2 = 8$; (u_n) n'est pas croissante car $u_0 > u_1$; (u_n) n'est pas décroissante car $u_1 < u_2$. Conclusion : (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.
23) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$. Pour tout $\geq 0, f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$, donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. Donc, (u_n) est strictement décroissante. D'où (u_n) est décroissante.
24) $u_{n+1} - u_n = \frac{1+n}{3+n} > 0$; (u_n) est strictement croissante.
25) $u_0 = 1, u_1 = -\frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, u_3 = 1$; (u_n) n'est pas croissante car $u_0 > u_1$; (u_n) n'est pas décroissante car $u_2 < u_3$.

4. Prouver qu'une suite est majorée ou minorée

Instruction : faire l'exercice 26 avec le professeur, faire les exercices 29 et 30 seul.

Définitions :

Soit $(u_n)_{n\geq p}$ une suite, alors :

- $(u_n)_{n\geq p}$ est **majorée** par le nombre réel M ssi pour tout $n \geq p$, $u_n \leq M$;
- $(u_n)_{n\geq p}$ est **minorée** par un nombre réel m ssi pour tout $n \geq p$, $u_n \geq m$;
- $(u_n)_{n\geq p}$ majorée ssi elle est majorée par un nombre réel;
- $(u_n)_{n\geq p}$ est minorée ssi elle est minorée par un nombre réel;
- $(u_n)_{n\geq p}$ est **bornée** ssi elle est minorée et majorée.

EXERCICES À FAIRE AVEC LE PROFESSEUR

Exercice 26

La suite (u_n) est définie par $u_n = \frac{2n-3}{n+1}$ pour tout naturel $n \geq 0$.
Nous admettrons que cette suite est croissante.

a) Démontrer que la suite (u_n) est minorée par -4.
b) Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 2.
c) Pourquoi la suite (u_n) est-elle bornée ?

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 27

La suite (u_n) est définie par $u_n = \frac{3n-1}{n}$ pour tout naturel $n \geq 1$. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 3.

Exercice 28

La suite (u_n) est définie par $u_n = \frac{n^2+1}{2n}$ pour tout naturel $n \geq 1$. Nous admettrons que cette suite est strictement croissante. Démontrer que la suite (u_n) est minorée.

EXERCICES POUR PRÉPARER L'INTERROGATION

Exercice 29

La suite (u_n) est définie par $u_n = \frac{2n+5}{n+1}$ pour tout naturel n. Nous admettrons que cette suite est strictement décroissante. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 10.

Exercice 30

La suite (u_n) est définie par $u_n = \frac{6n+7}{2n}$ pour tout naturel $n \geq 1$. Démontrer que la suite (u_n) est minorée par 0.

Solution des exercices 26 à 30

26)a) $u_0 = -3$ et (u_n) est croissante, d'où $-3 \leq u_n$, $-4 \leq u_n$. b) $2n-3 \leq 2n+2;\ 2n-3 \leq 2(n+1);\ \frac{2n-3}{n+1} \leq 2; u_n \leq 2$.
c) Parce qu'elle est minorée (d'après 1a) et majorée (d'après 1b).
27) $\frac{3n-1}{n} = 3 - \frac{1}{n} \leq 3$.
28) (u_n) est strictement croissante et est donc minorée (par u_0).
29) $u_0 = 5$ et (u_n) est strictement décroissante, d'où $u_n \leq 5$ et donc (u_n) est majorée par 10.
30) $6n + 7 > 6n = 3(2n); \frac{6n+7}{2n} > 3; u_n > 3; u_n \geq 0$.

5. Les suites arithmétiques et géométriques

Instruction : faire les exercices 31 à 33 avec le professeur, faire les exercices 40 à 42 seul.

DEFINITIONS

Soit p un entier naturel et $(u_n)_{n\geq p}$ une suite.
$(u_n)_{n\geq p}$ est une **suite arithmétique** ssi $\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_{n+1} = u_n + r$.
$(u_n)_{n\geq p}$ est une **suite géométrique** ssi $\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_{n+1} = u_n \times r$.
Dans les deux cas r s'appelle la raison de la suite.

PROPRIÉTÉS

La somme de termes consécutifs nous est donnée par la formule :

- $\left(\frac{premier\_terme\_de\_la\_somme+dernier\_terme\_de\_la\_somme}{2} \times nombre\_de\_termes\_de\_la\_somme\right)$
  pour les suites arithmétiques;
- $\left(premier\_terme\_de\_la\_somme \times \frac{1-raison^{nombre\_de\_termes\_de\_la\_somme}}{1-raison}\right)$
  pour les suites géométriques avec $r \neq 1$.

EXERCICES À FAIRE AVEC LE PROFESSEUR

Exercice 31

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}$.

On pose, pour tout n, $v_n = \frac{1}{u_n}$.

a) Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.
b) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison.
c) Déduisez une expression de v_n en fonction de n.
d) Déduisez une expression de u_n en fonction de n.
e) Calculer $S = \sum_{i=8}^{100} v_i$.

Exercice 32

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites définies par $u_1 = 12$, $v_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = v_n - u_n$.

a) Calculer w_1, w_2, w_3, w_4.
b) Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique, dont on déterminera le premier terme et la raison.
c) Donner l'expression de w_n en fonction de n.
d) Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$.
e) À partir de quelle valeur de n on a $S_n < -11{,}999999$?

Exercice 33

(v_n) est la suite définie par $v_n = 3^n + n$, pour tout entier naturel n.

a) Calculer v_0, v_1, v_2.
b) Prouver que la suite (v_n) n'est pas arithmétique.
c) Prouver que la suite (v_n) n'est pas géométrique.

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 34

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel , $u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n+1}$.

On pose, pour tout n, $v_n = \frac{1}{u_n}$.

a) Calculer les 4 premiers termes de la suite (v_n).
b) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison.
c) Déduisez une expression de v_n en fonction de n.
d) Déduisez une expression de u_n en fonction de n.
e) Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

Exercice 35

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

La suite (v_n) est définie par $v_n = u_n + 2$, pour tout entier naturel n.

a) Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.
b) Prouver que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
c) Déduisez une expression de v_n en fonction de n.
d) Déduisez une expression de u_n en fonction de n.
e) Calculer $S = \sum_{i=3}^{50} v_i$.

Exercice 36

(u_n) est la suite définie par $u_n = \frac{n+3}{n}$, pour tout entier naturel. $n \geq 1$

a) Calculer u_1, u_2, u_3.
b) Prouver que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
c) Prouver que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Exercice 37

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $2u_{n+1} = 2u_n + 1$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.
b) Montrer que la suite (u_n) est arithmétique et préciser sa raison.
c) Déduisez une expression de u_n en fonction de n.
d) Calculer $S_n = \sum_{i=4}^{n} u_i = u_4 + u_5 + \cdots + u_n$.

Exercice 38

(w_n) est la suite définie par $w_n = 2^{n+3}$, pour tout entier naturel n.

a) Calculer w_0, w_1, w_2, w_3.
b) Montrer que la suite (w_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
c) Calculer $S_n = \sum_{i=5}^{n} w_i$.
d) À partir de quelle valeur de n on a $S_n \geq 50 \times 10^6$?

Exercice 39

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 - \frac{1}{3}u_n$, pour tout entier naturel n.

a) Calculer u_1, u_2.
b) Prouver que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
c) Prouver que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

EXERCICES POUR PRÉPARER L'INTERROGATION

Exercice 40

(u_n) est la suite définie par $u_n = n^2$, pour tout entier naturel n. (v_n) est la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$, pour tout entier naturel.

a) Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.
b) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison.
c) Déduisez une expression de v_n en fonction de n.
d) Calculer $S = v_6 + v_7 + \cdots + v_{200}$.

Exercice 41

Les suites numériques (v_n) et (w_n) sont définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$v_0 = -\frac{3}{2}$, $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n - 1$ et $w_n = 2v_n + 6$.

a) Calculer w_0, w_1, w_2, w_3.
b) Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique, dont on déterminera le premier terme et la raison.
c) Donner l'expression de w_n en fonction de n.
d) Donner l'expression de v_n en fonction de n.
e) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.
f) À partir de quelle valeur de n on a $S_n \geq 8{,}999999$?

Exercice 42

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$, pour tout entier naturel n.

a) Calculer u_1, u_2.
b) Prouver que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
c) Prouver que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Solutions des exercices 31 à 42

31)a)$v_0 = 1, v_1 = 3, v_2 = 5, v_3 = 7$;b)$v_{n+1} = v_n + 2$, la raison = 2 ; c) $v_n = 1 + 2n$;d) $u_n = \frac{1}{1+2n}$;e) $S = 10137$.

32)a) $w_1 = -11, w_2 = -\frac{11}{12}, w_3 = -\frac{11}{144}, w_4 = -\frac{11}{1728}$;b) $w_{n+1} = \frac{1}{12} w_n$, la raison = $\frac{1}{12}$, le premier terme = -11;c) $w_n = -11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$;d) $S_n = 12\left(\left(\frac{1}{12}\right)^n - 1\right)$; e) à partir de $n = 7$.

33)a)$v_0 = 1, v_1 = 4, v_2 = 11$;b) $v_1 = v_0 + 3$ et $v_2 = v_1 + 7$;c) $v_1 = 4v_0$ et $v_2 = \frac{11}{4} v_1$.

34)a)$v_0 = \frac{1}{2}, v_1 = \frac{7}{2}, v_2 = \frac{13}{2}, v_3 = \frac{19}{2}$;b) $v_{n+1} = v_n + 3$, la raison = 3 ; c) $v_n = \frac{1}{2} + 3n$;d) $u_n = \frac{2}{1+6n}$;e) $S_n = \frac{(1+3n)(n+1)}{2}$.

35)a)$v_0 = 8, v_1 = 24, v_2 = 72, v_3 = 216$;b) $v_{n+1} = 3v_n$, la raison = 3 ; c) $v_n = 8 \times 3^n$;d) $u_n = 8 \times 3^n - 2$;e) $S = 108(3^{48} - 1)$.

36)a) $u_1 = 4, u_2 = \frac{5}{2}, u_3 = 2$;b) $u_2 = u_1 - \frac{3}{2}$ et $u_3 = u_2 - \frac{1}{2}$;c) $u_2 = \frac{5}{8} u_1$ et $u_3 = \frac{4}{5} u_2$.

37)a)$u_0 = 1, u_1 = \frac{3}{2}, u_2 = 2, u_3 = \frac{5}{2}$;b) $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$, la raison = $\frac{1}{2}$;c) $u_n = 1 + \frac{1}{2} n$;d) $S_n = \frac{(8+n)(n-3)}{4}$.

38)a)$w_0 = 8, w_1 = 16, w_2 = 32, w_3 = 64$;b) $w_n = 8 \times 2^n$, la raison = 2, le premier terme = 8 ; c)$S_n = 256(2^{n-4} - 1)$; d) à partir de $n = 22$.

39)a) $u_1 = \frac{5}{3}, u_2 = 5$;b) $v_1 = v_0 + \frac{2}{3}$ et $v_2 = v_1 + \frac{10}{3}$;c) $v_1 = \frac{5}{3} v_0$ et $v_2 = 3v_1$.

40)a)$v_0 = 1, v_1 = 3, v_2 = 5, v_3 = 7$;b)$v_{n+1} = v_n + 2$, la raison = 2 ; c) $v_n = 1 + 2n$;d) $S = 40365$.

41)a) $w_0 = 3, w_1 = 2, w_2 = \frac{4}{3}, w_3 = \frac{8}{9}$;b) $w_{n+1} = \frac{2}{3} w_n$, la raison = $\frac{2}{3}$, le premier terme = 3 ;c) $w_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$;d)$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3$;e) $S_n = 9\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$; à partir de $n = 39$.

42)a) $u_1 = 1, u_2 = -1$;b) $v_1 = v_0 - 1$ et $v_2 = v_1 - 2$;c) $v_1 = \frac{1}{2} v_0$ et $v_2 = -1v_1$.

6. Les suites arithmétiques et géométriques – Expression en fonction de n

Instruction : faire les exercices 1 et 2 avec le professeur, faire les exercices 3 à 8 seul.

EXERCICES À FAIRE AVEC LE PROFESSEUR

Exercice 43

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 10$.
Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Résolution

$u_0 = 10$
$u_1 = 10 + 4$
$u_2 = 10 + 4 + 4 = 10 + 4(2)$
$u_3 = 10 + 4 + 4 + 4 = 10 + 4(3)$
…
$u_n = 10 + 4n \ \ \forall n \geq 0$

Exercice 44

Soit $(u_n)_{n\geq 5}$ la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_5 = 10$.
Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Résolution

$u_5 = 10$
$u_6 = 10 + 4$
$u_7 = 10 + 4 + 4 = 10 + 4(2)$
$u_8 = 10 + 4 + 4 + 4 = 10 + 4(3)$
…
$u_n = 10 + 4(n - 5) \ \ \forall n \geq 5$

EXERCICES POUR PRÉPARER L'INTERROGATION

Exercice 45

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite arithmétique de raison -6 et de premier terme $u_0 = 4$.
Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 46

Soit $(u_n)_{n\geq 3}$ la suite arithmétique de raison -6 et de premier terme $u_3 = 4$.
Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 47

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite géométrique de raison -6 et de premier terme $u_0 = 4$.
Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 48

Soit $(u_n)_{n\geq 9}$ la suite géométrique de raison -6 et de premier terme $u_9 = 4$.
Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

VERS UN PEU D'ABSTRACTION

Exercice 49

Soit $p \in \mathbb{N}$.
Soit $(u_n)_{n \geq p}$ la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p.
Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 50

Soit $p \in \mathbb{N}$.
Soit $(u_n)_{n \geq p}$ la suite géométrique de raison r et de premier terme u_p.
Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

7. Quelques applications

Instruction : faire ces exercices avec le professeur.

Cet exercice vient de la page 253 du live «MATH 1re S – ALGÈBRE ANALYSE GÉOMÉTRIE PROBABILITÉS – PROGRAMME 1991 - NOUVEAU TRANSMATH - NATHAN».

Exercice 51

83 Une personne souhaite placer durant plusieurs années un capital de 100 000 F. Elle hésite entre deux types de placement :

- un placement à **intérêts simples** à 10 % l'an : chaque année, son capital augmente d'une somme fixe égale à 10 % du capital initial, c'est-à-dire de 10 000 F ;
- un placement à **intérêts composés** à 8 % l'an : dans ce cas, les intérêts produits sont capitalisés, et rapportent donc eux aussi 8 % l'an.

Quel est, pour un placement d'une durée comprise entre un et dix ans, le type de placement le plus avantageux ?

CONSEIL : Noter S_n le capital obtenu au terme de n années lorsque les intérêts sont simples ($S_0 = 100\,000$ F), et C_n le capital obtenu au terme de n années lorsque les intérêts sont comptabilisés.

Exercice 52

Exercice page 174 du livre "Math'x Première S Didier"

Le modèle de Malthus

En 1798, Malthus publie *An essay on the Principle of Population*. Il y émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira le monde à la famine.

En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions d'habitants et l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes. Malthus supposa que la population augmentait d'environ 2 % chaque année et que l'amélioration de l'agriculture permettait de nourrir 500 000 personnes de plus chaque année.

Pour $n \geqslant 0$ on note P_n la population l'année $1800 + n$ et a_n le nombre de personnes que l'agriculture permet de nourrir cette même année.

1. a. Exprimer P_n en fonction de n.

b. D'après Malthus, quelle aurait été la population en 1900 ?

2. Combien l'agriculture aurait-elle pu nourrir de personnes en 1900 selon ses prévisions ?

3. Représenter sur un graphique les termes des deux suites correspondants à $n = 0, 10, 20, ..., 150$.

4. À l'aide d'une calculatrice, déterminer en quelle année la situation devait devenir critique selon le modèle de Malthus. Qu'en pensez-vous ?

Solution de l'exercice 51

83. $S_n = S_0 + 10\,000\,n$ et $C_n = C_0\,(1{,}08)^n$;
$S_0 = C_0 = 100\,000$.

n	S_n	C_n
1	110 000	108 000
2	120 000	116 640
3	130 000	125 971
4	140 000	136 048
5	150 000	146 932

n	S_n	C_n
6	160 000	158 687
7	170 000	171 382
8	180 000	185 093
9	190 000	199 900
10	200 000	215 892

(C_n arrondi au franc supérieur).

Le placement à intérêts simples est plus avantageux pendant les six premières années ; au-delà, c'est le placement à intérêts composés qui devient le plus avantageux.

8. Exercices sur les suites des TC

Exercice n°53

La population actuelle augmente de 1% par an. En 2010, elle était de 6,9 milliards.
On note u_n la population mondiale en l'année $2010 + n$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3 (la population mondiale en 2011, 2012 et 2013).
2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,01 et préciser son premier terme.
3) Exprimer u_n en fonction de n.
4) En supposant que le taux d'accroissement se maintient, estimer la population mondiale en 2025.
5) En quelle année la population mondiale atteindrait-elle 9 milliards ? Justifier.

Exercice n°54

Le nombre d'arbres d'une forêt est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, en cours de l'année (2010+*n*). En 2010, la forêt possède 50 000 arbres.

Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5% des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

La situation peut être modélisée par $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel *n* par la relation

$u_{n+1} = 0,95 \cdot u_n + 3$.

1°) La suite (u_n) est-elle arithmétique? Géométrique? Justifier.

On considère la suite (v_n) définie par tout entier naturel *n* par $v_n = 60 - u_n$.

2°) a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont précisera la raison.

b) Exprimer v_n en fonction de *n*.

c) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $u_n = 60 - 10 \cdot 0,95^n$.

3°) Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.

4°) a) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

b) Qu'est-ce que on peut en déduire pour la suite (u_n)? Qu'est-ce que cela signifie pour le nombre d'arbres dans la forêts?

5°) Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10% le nombre d'arbres de la forêt en 2010.

6°) Est-il possible que le nombre d'arbres dépasse 60 000? Justifier la réponse.

Exercice n°55

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n + 1) \end{cases}$

Soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2$ pour tout n ∈ ℕ.

1) Calculer u_1, u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique? Géométrique? Justifier.
2) Calculer v_0, v_1, v_2.
3) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
4) Exprimer v_n en fonction de n
5) En déduire l´expression de u_n en fonction de n.
6) Calculer la valeur exacte de u_6.
7) Donner la valeur approché à 10^{-2} près des sommes $S = v_0 + v_1 + ... + v_6$ et $S' = u_0 + u_1 + ... + u_6$.

Exercice n°56

La suite (v_n) est définie par $v_0 = 1$ et $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1} \end{cases}$ et (u_n) la suite par $u_n = \frac{1}{v_n}$ pour tout naturel n.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Exprimer le terme u_{n+1} en fonction du terme u_n. En déduire que (u_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison.
3. Déterminer le terme général de la suite (u_n).
4. Déterminer le terme général de la suite (v_n).
5. A partir de quelle valeur de n, a-t-on $v_n \leq 10^{-3}$?

Exercice n°57

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n).
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ pour tout entier naturel n.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et donner ses éléments caractéristiques.
   b) Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n.
   c) Montrer que $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$ puis exprimer u_n en fonction de n.

Exercice n°58

La suite (u_n) est définie par récurrence: $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 5 \end{cases}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Dans le repère orthonormal d´unité graphique 1 cm, représenter graphiquement les quatres premiers termes de la suite (u_n) à l´aide de la courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 5$, en déduire la limite éventuelle de (u_n).
3. Soit (v_n) une suite donnée par: $v_n = u_n - 10$.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique, donner sa raison et premier terme.
   b) Exprimer (v_n) puis (u_n) en fonction de n.
   c) Calculer la limite de (u_n).
   d) Exprimer $\sum_{0}^{n} v_n$ en fonction de n, puis $\sum_{0}^{n} u_n$ en fonction de n.

Exercice n°59

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier *n* par $u_n = 2n - 1$.
   a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont vous préciserez le premier terme u_0 et la raison *r*.
   b) Calculer en fonction de *n* la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = 2^{u_n}$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique pour laquelle vous préciserez le premier terme v_0 et la raison *q*.
   b) Calculer $P_n = v_0 \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_n$ en fonction de *n*.

Exercice n°60

La population d´une ville est de 100 000 habitants en 2008. Suite à la création très proche d´un aéroport, on fait l´hypothèse que la population de cette ville va régulièrement diminuer de 20 % par an.
On note u_0 la population en 2008, u_1 en 2009, ...

1. Calculer u_1.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de la suite (u_n).
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Calculer en quelle année la population de cette ville sera inférieure, pour la première fois, à 20 000 habitants?
5. Question facultative et de réflexion: Personnellement, que pouvez-vous conjecturer à propos de la population de cette ville?